Elementi di Analisi Reale

Laurea Triennale in Matematica

Registro Didattico a.a. 2025/2026

27 marzo 2026

Lezione 1-2 (26 febbraio 2026) Introduzione al corso. Successioni in $\mathbb{R}$. Definizioni di successione, successione convergente, successione limitata, sottosuccessione. Teorema di Bolzano-Weierstrass (solo enunciato). Definizione di successione di Cauchy. Teorema sull'equivalenza in $\mathbb{R}$ della nozione di successione di Cauchy e successione convergente (con dimostrazione). Teorema sulla regolarità delle successioni monotone (solo enunciato). Definizione di massimo e minimo limite e proprietà di base.

Lezione 3-4 (2 marzo 2026) Massimo e minimo limite: principali proprietà. Esempi di successioni oscillanti/periodiche. Esempio: l'insieme dei punti di accumulazione della successione $\big(\sin(n)\big)_n$ è l'intervallo $[-1, 1]$.

Lezione 5-6-7 (3 marzo 2026) Distanze, spazi metrici, norme, spazi normati. Esempi di distanze: distanza discreta, distanza Euclidea in $\mathbb{R}^N$. Disuguaglianza di Cauchy–Schwartz (con dimostrazione). Norma $\|\cdot\|_p$ con $p \geq 1$: disuguaglianze di Young, Hölder e Minkowski. Lo spazio $C([a, b])$ con la norma del sup. Lo spazio ℓ^∞. La distanza di Hamming.

Lezione 8-9 (5 marzo 2026) Gli spazi ℓ^1 e ℓ^p con $p > 1$. Definizioni di successione convergente e di Cauchy in uno spazio metrico. Unicità del limite. Ogni successione convergente è di Cauchy. Non vale il viceversa: la successione $\big((1+1/n)^n\big)_n$ è di Cauchy ma non è convergente in $(\mathbb{Q}, d)$ con $d(x, y) := |x - y|$. Definizione di spazio metrico completo. Topologia negli spazi metrici. Palle aperte. Punto interno a un insieme, insieme aperto. Stabilità degli insiemi aperti rispetto all'unione qualsiasi e all'intersezione finita. Definizione di insieme chiuso. Stabilità degli insiemi chiusi rispetto all'intersezione qualsiasi e all'unione finita.

Lezione 10-11-12 (10 marzo 2026) Topologia negli spazi metrici. Caratterizzazione sequenziale degli spazi metrici. Chiusura $\overline{E}$ e parte interna $\text{int}(E)$ di un insieme E. Punto esterno, di accumulazione, di bordo di un insieme. Derivato $\mathcal{D}(E)$ di un insieme E. Caratterizzazioni equivalenti di punto di accumulazione. Proposizione: $\overline{E} = E \cup \mathcal{D}(E)$. Topologia di (X, d) con la distanza discreta. Esempi

Lezione 13-14 (11 marzo 2026) Definizione di distanze equivalenti. Teorema: due distanze equivalenti inducono gli stessi insiemi aperti. Teorema: le norme $\|\cdot\|_p$ per $p \in [1, +\infty]$ sono tutte equivalenti (dimostrazione per i casi $p \in \{1, 2, +\infty\}$). Esercizio: una funzione $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ concava e tale che $\phi(0) = 0$ è subadditiva.

Conseguenza: $d(x,y) := |x-y|^p$ per $p \in (0,1)$ è una distanza su $\mathbb{R}$ (non indotta da una norma). Funzioni continue $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ con (X,d) spazio metrico: alcune definizioni equivalenti.

Lezione 15-16 (12 marzo 2026) Funzioni continue $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ con (X,d) spazio metrico: alcune definizioni equivalenti. Esempio: delta di Dirac $\delta_0 : \mathrm{C}([-1,1]) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua rispetto alla distanza d_∞ su X indotta dalla norma del sup; non è continua rispetto alla distanza d_1 indotta dalla norma integrale L^1.

Lezione 17-18 (16 marzo 2026) Spazi metrici completi in dimensione infinita: completezza dello spazio delle funzioni limitate su un insieme X con la norma del sup; completezza degli spazi ℓ^∞ e ℓ^1.

Lezione 19-20-21 (17 marzo 2026) Spazi metrici completi in dimensione infinita: completezza dello spazio delle funzioni continue e limitate su uno spazio metrico (X,d) rispetto alla norma del sup. Teorema: uno sottospazio Y di uno spazio metrico completo (X,d) è completo se e solo Y è chiuso in X. Esempi di spazi completi e no. Esercizi.

Lezione 22-23 (19 marzo 2026) Funzioni Lipschitziane tra spazi metrici: definizione ed esempi. Teorema delle contrazioni.

Lezione 24-25-26 (24 marzo 2026) Esempi e controesempi al teorema delle contrazioni. Due esercizi sul teorema delle contrazioni. Altri esercizi.

Lezione 27-28 (26 marzo 2026) Definizione di insieme compatto in uno spazio metrico. Esempi di spazi metrici compatti e no. Teorema: uno spazio metrico compatto è completo.