Istituzioni di Matematica I

Laurea Triennale in Scienze Chimiche

Registro Didattico a.a. 2024/2025

21 dicembre 2024

Lezione 1-2 (30 settembre 2024) Elementi di insiemistica: inclusione tra insiemi e operazioni tra insiemi (unione, differenza, complementazione, prodotto cartesiano). Numeri naturali, numeri interi relativi, numeri razionali. I numeri razionali sono un campo.

Lezione 3-4 (1 ottobre 2024) Relazione d'ordine, relazione d'ordine totale e relazione d'ordine compatibile con operazioni di somma e prodotto. I razionali sono un campo totalmente ordinato. Scrittura decimale dei razionali. Non esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$ (con dimostrazione). I numeri reali e la retta reale. I reali sono un campo totalmente ordinato. Distanza in $\mathbb{R}$, definizione di modulo di un numero reale e sue proprietà.

Lezione 5-6 (2 ottobre 2024) Disuguaglianza triangolare (con dimostrazione). Intervalli in $\mathbb{R}$ e la proprietà che li caratterizza. Definizione di minimo e massimo di un insieme.

Lezione 7-8 (3 ottobre 2024) Definizione di minorante, maggiorante. Definizione di insieme limitato inferiormente/superiormente e di insieme limitato. Esempi. Definizione di estremo inferiore e di estremo superiore. Assioma di Dedekind e Principio di Archimede. Esercizi.

Lezione 9-10 (4 ottobre 2024) Esercizi. Sommatorie e loro proprietà. Progressione geometrica e formula per la somma dei primi termini di una progressione geometrica di ragione q. Fattoriale di n.

Lezione 11-12 (7 Ottobre 2023) Coefficienti binomiali, Principio di Induzione, Disuguaglianza di Bernoulli (con dimostrazione), Formula del binomio di Newton (con dimostrazione). Esempi.

Lezione 13-14 (8 Ottobre 2024) Teorema di esistenza delle radici $n-$esime. Potenze ad esponente reale. Proprietà delle potenze. Logaritmo (Teorema di esistenza e sua definizione).

Lezione 15-16 (9 Ottobre 2024) Proprietà dei logaritmi. Funzioni reali di variabile reale: definizione di dominio, codominio, immagine e grafico di una funzione. Definizione di funzione iniettiva, suriettiva, biettiva. Definizione di funzione monotona e strettamente monotona. Relazione tra stretta monotonia e iniettività. Definizione di funzione (superiormente, inferiormente) limitata.

Lezione 17-18 (10 Ottobre 2024) Osservazioni sui grafici delle funzioni iniettive, suriettive e limitate. Definizione di funzione invertibile e funzione inversa. Una funzione strettamente monotona è invertibile sull'immagine (con dimostrazione). Relazione tra il grafico di una funzione invertibile e il grafico della sua inversa. Funzioni simmetriche: pari e dispari.

Lezione 19-20 (11 Ottobre 2024) Funzioni periodiche. Funzioni potenza a esponente reale: definizione, proprietà e andamento grafico qualitativo. In particolare la funzione $x \mapsto x^n$ in $[0, +\infty)$ se n è pari, in $\mathbb{R}$ se n è dispari, è strettamente monotona, quindi invertibile. La funzione inversa è la funzione $f^{-1}(y) := \sqrt[n]{y}$.

Lezione 21-22 (14 Ottobre 2024) Funzioni esponenziali e logaritmi. Operazioni sui grafici. Funzioni composte. Esempi. Dominio naturale di una funzione. Esercizi.

Lezione 23-24 (15 Ottobre 2024) Esercizi. Una funzione strettamente crescente (rispettivamente, decrescente) è invertibile e la sua inversa è strettamente crescente (risp., decrescente). Richiami sulla misura in radianti di un angolo. Funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$: definizione e prime proprietà.

Lezione 25-26 (16 Ottobre 2024) Funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$, $arcsinx$, $\arccos x$: definizione, grafici e proprietà. Formule addizione seno e coseno. Funzioni trigonometriche $\tan x, \text{cotan}\ x$ $\arctan x$: definizione, grafici e proprietà.

Lezione 27-28 (17 Ottobre 2024) $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \leq \tan x$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ (con dimostrazione). Esempi di disequazioni trigonometriche. Funzioni iperboliche ($\sinh x$, $\cosh x$): definizione e grafici.

Lezione 29-30 (18 Ottobre 2024) Costruzione del campo complesso: definizione di $\mathbb{C}$, operazioni di somma e prodotto, proprietà. Esempi. Parte reale e parte immaginaria di un numero complesso. Modulo di un numero complesso: proprietà e disuguaglianza triangolare. Coniugato di un numero complesso: proprietà.

Lezione 31-32 (21 Ottobre 2024) Forma trigonometrica dei numeri complessi. Interpretazione geometrica del prodotto complesso. Radici ennesime in campo complesso. Formula per il calcolo delle radici complesse di una equazione di secondo grado Esercizi.

Lezione 33-34 (22 Ottobre 2024) Teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato). Definizione di successione inferiormente limitata, superiormente limitata, limitata. Cosa vuol dire che una successione verifica una proprietà *definitivamente*. Esempi. Definizione di limite finito di una successione e di successione convergente.

Lezione 35-36 (23 Ottobre 2024) Una successione convergente è limitata (con dimostrazione). Lemma: $(a_n)_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$(con dimostrazione). Definizione di successione negativamente e positivamente divergente. Definizione di successione irregolare. Esempi. Teorema di unicità del limite (idea dim. di come escludere due diversi limiti finiti). Algebra dei limiti e forme indeterminate.

Lezione 37-38 (24 Ottobre 2024) Limiti della successioni $(n^\alpha)_n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e di $(q^n)_n$ al variare di $q \in \mathbb{R}$, limite di $\log(n) = +\infty$. Definizione successioni monotone (strettamente) crescenti/decrescenti. Esempi. Teorema di regolarità delle successioni monotone. Applicazione: la successione $(1 + 1/n)^n$ converge e il numero di Nepero e è definito come il suo limite. Esercizi.

Lezione 39-40 (25 Ottobre 2024) Esercizi. Teorema di permanenza del segno I (con dimostrazione nel caso di successione convergente) e Teorema di permanenza del segno II o di monotonia del limite (con dimostrazione) e osservazioni. Teorema dei carabinieri o del confronto. Corollario: $|a_n| \leq c_n$ definitiv. con $c_n \to 0$, allora $a_n \to 0$ (con dimostrazione). Proposizione: se $(a_n)_n$ è limitata e $c_n \to 0$, allora $a_n c_n \to 0$ (con dimostrazione). Proposizione: se $(a_n)_n$ è limitata e $b_n \to \pm\infty$, allora $\frac{a_n}{b_n} \to 0$. Se $(a_n)_n$ è positivamente/negativamente divergente, allora $(a_n)_n$ è rispettivamente inferiormente/superiormente limitata. Esempi ed esercizi.

Lezione 41-42 (28 ottobre 2024) Se $a_n \geqslant b_n$ definitivamente e $(b_n)_n$ è positivamente divergente (rispettivamente, $(a_n)_n$ è negativamente divergente), allora anche $(a_n)_n$ è positivamente divergente (risp., $(b_n)_n$ è negativamente divergente). Infiniti di ordine superiore, inferiore, dello stesso ordine. Criterio del rapporto: idea della dimostrazione. Esercizi su limiti di successioni.

Lezione 43-44 (29 ottobre 2024) Gerarchia degli infiniti e alcuni limiti notevoli. Esercizi.

Lezione 45-46 (30 ottobre 2024) Infinitesimi di ordine superiore, inferiore, dello stesso ordine. Serie numeriche: generalità. Esempi di serie: serie armonica, serie armonica generalizzata (di esponente 2), serie geometrica. Esempio della scacchiera. Achille e la tartaruga. Serie geometrica: calcolo del carattere e della somma della serie geometrica. Esercizi sui limiti di successioni.

Lezione 47-48 (31 ottobre 2024) Serie di Mengoli, serie telescopiche. Proposizione: se una serie $\Sigma\, a_n$ converge, allora $a_n \to 0$. Non vale il viceversa. Serie a termini non negativi: regolarità delle serie a termini non negativi; criterio del confronto e del confronto asintotico. Applicazione: la serie armonica generalizzata $\Sigma\ 1/n^\alpha$. Esempi ed esercizi.

Lezione 49-50 (4 novembre 2024) Serie a termini non negativi: criterio del rapporto e della radice (con dimostrazioni). Esempi ed esercizi.

Lezione 51-52 (5 novembre 2024) Serie a termini di segno generico: una serie assolutamente convergente è convergente. Serie a segno alterno: criterio di Leibniz. Esercizi.

Lezione 53-54 (6 novembre 2024) Nozione di limite di una funzione $f(x)$ per $x \to \pm\infty$. Gerarchia degli infiniti. Esempi ed esercizi.

Lezione 55-56 (7 novembre 2024) Definizione di limite finito di una funzione $f(x)$ per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R}$. Esempi. Esercizi del Foglio 4.

Lezione 57-58 (8 novembre 2024) Definizione di limite infinito di una funzione $f(x)$ per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R}$. Teorema ponte: caratterizzazione del limite di una funzione attraverso successioni. Applicazione: il limite di $\sin(1/x)$ per x che tende a 0 non esiste. Esercizi.

Lezione 59-60 (11 novembre 2024) Teorema di permanenza del segno. Corollario: monotonia del limite. Teorema dei due carabinieri. Teorema di confronto.

Lezione 61-62 (12 novembre 2024) Teorema di unicità del limite. Algebra dei limiti. Limite destro e sinistro di una funzione in un punto. Teorema: una funzione f ammette limite in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se esistono i limiti destro e sinistro di f in x_0 e tali limiti coincidono. Primo limite notevole $\lim_{x\to\pm\infty}(1+1/x)^x = e$ e sue conseguenze. Esercizi.

Lezione 63-64 (13 novembre 2024) Secondo limite notevole $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\beta} = 0$ per $\beta > 0$. Terzo limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ e sue conseguenze. Esercizi.

Lezione 65-66 (14 novembre 2024) Esistenza del limite destro e sinistro in un punto per una funzione monotona. Applicazione: $\lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x_0}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Esercizi.

Lezione 67-68 (15 novembre 2024) Definizione di funzione continua in un punto e in un intervallo. Esempio: continuitá delle funzioni $\log(x)$ e $\sin(x)$ nel loro dominio di definizione. Esercizio.

Lezione 69-70 (18 novembre 2024) Algebra delle funzioni continue: continuità della somma, differenza, prodotto, rapporto. La composizione di funzioni continue è continua. Esercizi.

Lezione 71-72 (19 novembre 2024) Teorema di esistenza degli zeri (con dimostrazione). Teorema di Weierstrass. Teorema dei valori intermedi (con dimostrazione). Esercizi.

Lezione 73-74 (20 novembre 2024) Esonero.

Lezione 75-76 (21 novembre 2024) Applicazioni dei teoremi sulle funzioni continue: calcolo dell'immagine della funzione $x \mapsto x^n$ definita in $[0, +\infty)$ se n è pari, in $\mathbb{R}$ se n è dispari; un polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale. Teorema: la funzione $x \mapsto x^n$ definita in $[0, +\infty)$ se n è pari, in $\mathbb{R}$ se n è dispari, è strettamente monotona, quindi invertibile. La funzione inversa è la funzione $f^{-1}(y) := \sqrt[n]{y}$. Teorema: una funzione strettamente crescente (rispettivamente, decrescente) è invertibile e la sua inversa è strettamente crescente (risp., decrescente). Teorema: una funzione continua definita su un intervallo è invertibile se e solo se è strettamente monotona. In tal caso, la sua inversa è continua (solo enunciato). Osservazioni ed esempi. Esercizi.

Lezione 77-78 (22 novembre 2024) Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale: definizione di derivata di una funzione in un punto. Calcolo della derivata di funzioni elementari (usando la definizione). Definizione di retta tangente.

Lezione 79-80 (25 novembre 2024) Derivata destra, derivata sinistra in un punto. Applicazione: non derivabilità della funzione $|x|$. Teorema: una funzione derivabile è continua (con dimostrazione). Non vale il viceversa: la funzione $|x|$ è continua ma non derivabile in $x = 0$. Algebra delle derivate: derivata della somma, differenza, prodotto, rapporto di due funzioni derivabili (con dimostrazione).

Lezione 81-82 (26 novembre 2023) Derivata di una funzione composta (con "dimostrazione"). Esempi. Esercizi.

Lezione 83-84 (27 novembre 2024) Derivata di una funzione inversa (con giustificazione euristica della formula e idea geometrica). Applicazione: calcolo della derivata delle funzioni $\log(x)$, $\arctan(x)$ e $\arcsin(x)$ ($\arccos(x)$ lasciato per esercizio). Punti di massimo e di minimo locali.

Lezione 85-86 (28 novembre 2024) Teorema di Fermat (con dimostrazione). Teorema di Rolle (con dimostrazione) e alcune osservazioni. Teorema di Lagrange (con dimostrazione). Teorema di Cauchy.

Lezione 87-88 (29 novembre 2024) Applicazioni del Teorema di Lagrange: Conseguenze del Teorema di Lagrange: una funzione derivabile in un intervallo è costante se e solo se la sua derivata è identicamente nulla; una funzione derivabile su un intervallo è crescente (rispettivamente, decrescente) se e solo se la sua derivata è non negativa (risp., non positiva). Come fare uno studio qualitativo del grafico di una funzione e ricerca di massimi e minimi (locali e assoluti) tramite lo studio del segno della derivata prima

Lezione 89-90 (2 dicembre 2024) Teoremi di de l'Hôpital. Esempi ed esercizi.

Lezione 91-92 (3 dicembre 2024) Definizione di insieme convesso. Definizione di funzione convessa e concava. Teorema: una funzione convessa è continua. Teorema: caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili una volta e per funzioni derivabili due volte in un intervallo. Definizione di punto di flesso. Esercizi.

Lezione 93-94 (4 dicembre 2024) Derivabilità di una funzione vs. limite della derivata. Approssimazione di funzioni e polinomio di Taylor. Nozione di o piccolo. Teorema: data una funzione f derivabile n volte in un punto x_0, il polinomio di Taylor P_n è l'unico polinomio di grado n tale che il resto $R_n(x) := f(x) - P_n(x)$ è un o piccolo di $(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$ (enunciato). Cenni all'algebra degli o piccoli.

Lezione 95-96 (5 dicembre 2024) Polinomio di Taylor di alcune funzioni elementari. Calcolo di alcuni limiti usando il polinomio di Taylor.

Lezione 97-98 (6 dicembre 2024) Esercizi sui limiti di funzioni usando il Teorema di de l'Hôpital o il polinomio di Taylor. Introduzione al calcolo integrale per funzioni di una variabile: teoria dell'integrazione vs. teoria della misura. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e integrale di Riemann (per una funzione limitata definita su un intervallo chiuso e limitato).

Lezione 99-100 (9 dicembre 2024) Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann. Classi di funzioni integrabili (su un intervallo chiuso e limitato): funzioni continue; funzioni monotone; funzioni ottenute incollando funzioni integrabili. Proprietà dell'integrale: linearità, additività rispetto all'insieme di integrazione, monotonia. Teorema della media integrale (con dimostrazione).

Lezione 101-102 (10 dicembre 2024) Definizione di primitiva. Teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione). Lista di alcune primitive elementari. Integrazione per sostituzione. Esempi e applicazioni.

Lezione 103-104 (11 dicembre 2024) Integrazione di funzioni razionali. Esempi e esercizi.

Lezione 105-106 (12 dicembre 2024) Integrazione per parti. Esercizi.

Lezione 107-108 (13 dicembre 2024) Definizione di integrale generalizzato di una funzione non limitata su un intervallo limitato. Calcolo di $\int_0^1 1/x^\alpha \, dx$ al variare di $\alpha > 0$. Definizione di integrale generalizzato su un intervallo non limitato. Calcolo di $\int_1^{+\infty} 1/x^\alpha \, dx$ al variare di $\alpha > 0$. Applicazioni: la serie armonica $\sum 1/n$ è divergente; la serie armonica generalizzata $\sum 1/n^\alpha$ è convergente per ogni $\alpha > 1$.

Lezione 109-110 (16 dicembre 2024) Equazioni differenziali: generalità. Equazioni differenziali lineari del primo ordine: ogni soluzione è somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata (con dimostrazione). Ricerca delle soluzioni di una equazione omogenea: esempi. Formula per la soluzione dell'equazione omogenea.

Lezione 111-112 (17 dicembre 2024) Equazioni differenziali lineari del primo ordine: formula per la soluzione generale dell'equazione omogenea. Esempi. Problema di Cauchy. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine e problema di Cauchy: teoremi generali (senza dimostrazione). Oscillatore armonico.

Lezione 113-114 (18 dicembre 2024) Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: soluzioni dell'equazione omogenea associata e polinomio caratteristico. Esempi.

Lezione 115-116 (19 dicembre 2024) Ricerca di una soluzione particolare tramite il metodo di somiglianza. Termine noto della forma esponenziale per un polinomio: caso di non risonanza. Esempi. Termine noto della forma esponenziale per un polinomio: caso di risonanza.

Lezione 117-118 (20 dicembre 2024) Termine noto della forma $f(t) = e^{at}(k_1\cos(bt)\ +k_2\sin(bt))$ con $a, b, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$: caso di non risonanza, caso di risonanza. Esempi. Oscillatore armonico e oscillatore armonico forzato.